

# Chapitre 1 : Bases 2, 10, 16

## 1. Les bases : Binaire, Décimale et Hexadécimale

Afin de pouvoir appréhender correctement ce cours il est essentiel de maîtriser trois bases dans lesquelles exprimer des valeurs.

La **base décimale** est la base que chacun maîtrise depuis la plus tendre enfance. En effet les nombres que nous utilisons tous les jours s'exprime avec une unité prenant 10 valeurs de 0 à 9.

Les systèmes numériques ne manipulent que deux valeurs : 0 et 1 c'est ce que l'on appelle un bit. Il travaille avec des nombres binaires, qui s'exprime donc dans une **base 2**.

Enfin une autre base, celle de **16 s'appelle l'hexadécimale**. Son unité prend ces valeurs de 0 à 9 puis A, B, C, D, E, F. On retrouve ces valeurs dans les clefs Wi-Fi par défaut des boxs !

### 1.1. Base décimale

Dans notre système de numération (c'est à dire notre façon d'écrire les nombres) nous utilisons la base 10 dite décimale. Cela signifie que l'on compte par paquets de dix.

#### Exemples :

**15** représente **1** paquet de 10 plus **5** unités.

**456** représente **4** paquets de 100 plus **5** paquets de 10 plus **6** unités.

**6 724** représente **6** paquets de 1000 plus **7** paquets de 100 plus **2** paquets de 10 plus **4** unités.

Mathématiquement on écrit plutôt :

$$\begin{aligned} 15 &= 10 + 5 = 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0 \\ 456 &= 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0 \\ 6724 &= 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 \end{aligned}$$

Ou encore :

*on observe que le premier est noté "vingt" et le "zéro"*

#### Exemple :

La base 10 s'est imposée peu à peu aux sociétés humaines qui pouvaient s'appuyer sur leurs dix doigts pour compter. Mais bien d'autres furent utilisées comme la base 60 par les Babyloniens. D'ailleurs on s'en sert encore pour l'heure.

## 1.2. Base binaire

Lorsque nous étudierons l'architecture des ordinateurs nous verrons qu'ils sont composés de transistors bloquants ou passants. Le fait qu'il n'y ait que deux états possibles, privilégie l'idée de compter de deux en deux.

Un nombre écrit en base 2 représente donc des paquets de puissance de 2. La base 2, dites binaire, contient des bits prenant leurs valeurs parmi 0 ou 1. On note les nombres suivis d'un b ou B ou 2 comme

$10_2$  ou  $10_B$  ou  $(10)_2$   
une succession de 8 bits forme un octet

Exemple :  $(101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 4 + 1 = 5$

## 1.3. Base hexadécimale

La base 16, dite hexadécimale, contient des nombres notés comme une succession de nombre allant de 0 à 15. Par convention 10, 11, 12, 13, 14 et 15 sont respectivement remplacées par A, B, C, D, E, F. On note les nombres suivis d'un h ou H comme A5h ou A5H. ou  $(A5)_{16}$

Exemple :  $(A5)_{16} = 10 \times 16^1 + 5 \times 16^0 = 165$

| Base 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| Base 16 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A  | B  | C  | D  | E  | F  |



**Notation :** À partir de maintenant pour ne pas faire de confusion entre les bases on indiquera quand cela est nécessaire la base en bas du nombre,  $(11)_2$  et  $(11)_{16}$ . Si rien n'est indiqué on considère qu'il s'agit de la base 10.

## 1.4. Exercices

- Compléter le tableau suivant :

| Nombre<br>décimal | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | Base<br>2 | Base<br>16 | Nombre<br>décimal | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | Base<br>2 | Base<br>16 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-----------|------------|-------------------|-------|-------|-------|-------|-----------|------------|
| 0                 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0000b     | 0h         | 8                 | 1     | 0     | 0     | 0     | 1000b     | 8h         |
| 1                 | 0     | 0     | 0     | 1     | 0001b     | 1h         | 9                 | 1     | 0     | 0     | 1     | 1001b     | 9h         |
| 2                 | 0     | 0     | 1     | 0     | 0010b     | 2h         | 10                | 1     | 0     | 1     | 0     | 1010b     | Ah         |
| 3                 | 0     | 0     | 1     | 1     | 0011b     | 3h         | 11                | 1     | 0     | 1     | 1     | 1011b     | Bh         |
| 4                 | 0     | 1     | 0     | 0     | 0100b     | 4h         | 12                | 1     | 1     | 0     | 0     | 1100b     | Ch         |
| 5                 | 0     | 1     | 0     | 1     | 0101b     | 5h         | 13                | 1     | 1     | 0     | 1     | 1101b     | Dh         |
| 6                 | 0     | 1     | 1     | 0     | 0110b     | 6h         | 14                | 1     | 1     | 1     | 0     | 1110b     | Eh         |
| 7                 | 0     | 1     | 1     | 1     | 0111b     | 7h         | 15                | 1     | 1     | 1     | 1     | 1111b     | Fh         |

• Décomposer les nombres suivants comme dans les exemples :

- $3\ 540 = 3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 0 \times 10^0$
- $1001_b = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9$
- $1001_h = 1 \times 16^3 + 0 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 1 \times 16^0 = 4097$
- $(0111)_2 = 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 7$
- $BB_h = 11 \times 16^1 + 11 \times 16^0 = 187$
- $(5B2)_{16} = 5 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 2 \times 16^0 = 1458$
- $11111111_b = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 255$
- $1001 = 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

• Répondre aux questions suivantes :

- Combien d'octets font 32 bits ?

$$\frac{32}{8} = 4 \text{ octets}$$

- Dans l'octet suivant :  $(10011010)_2$ , quel est le bit de poids fort, le bit de poids faible ?

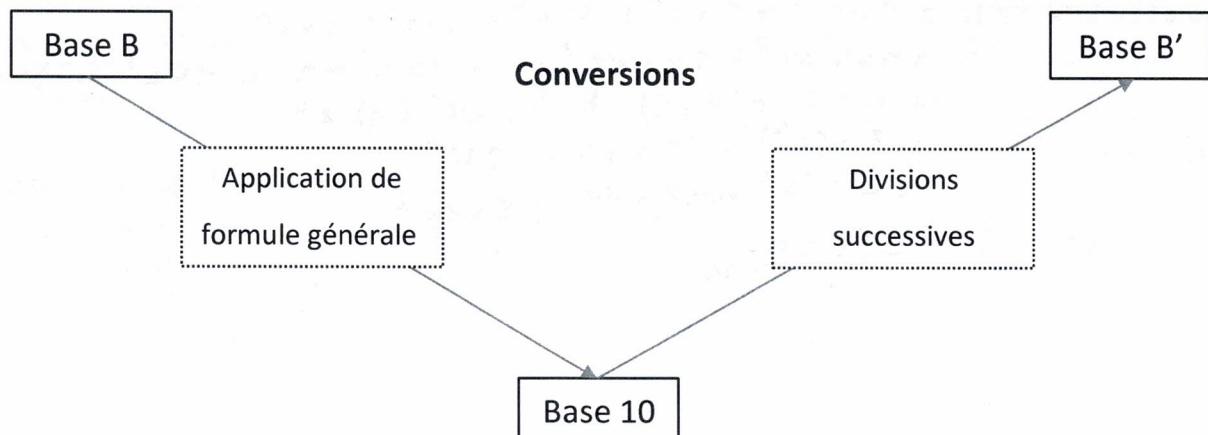
$$+ \text{ fort : } 1 \times 2^7 \quad + \text{ faible : } 0 \times 2^0$$

- Dans le nombre 4 004, Qu'est-ce qui différencie le 4 de gauche de celui de droite ?

Le 4 de gauche est plus fort que celui de droite car il est au rang 3

## 2. Changement de base

Dans un cas général, pour passer d'une base B à une base B' on utilise la base décimale comme base transitoire selon le schéma suivant :



## Exemples :

$$5Ah = 5 \times 16^1 + 10 \times 16^0 = 90$$

Pour comprendre ce mécanisme prenons l'exemple 5Ah que nous aimerions convertir en binaire :

Binaire  $\rightarrow$  division euclidienne successive

$$90 = 45 \times 2 + 0 \quad \text{Bit pair faillie (LSB) Less significant Bit}$$

$$45 = 22 \times 2 + 1 \quad 90 = (1011010)_2$$

$$22 = 11 \times 2 + 0$$

$$11 = 5 \times 2 + 1$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

$$1 = 0 \times 2 + 1$$

$$1011010 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

Bit pair fat (MSB) Most significant Bit

## 2.1. Cas particuliers

Certaines conversions peuvent se faire de manière directe lorsque dans les bases des facteurs apparaissent. C'est le cas pour le passage de la base 2 à la base 16 et de la base 16 à la base 2.

En effet  $16 = 2^4$ .

Pour le passage de la base 2 à la base 16 il faut regrouper des paquets de 4 symboles binaires du LSB au MSB. En mettant des puissances de 16 en facteur on retrouve bien la formule initiale.

$$\begin{aligned} \text{Exemple : } 1011001001b &= 1 \times 2^9 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 2 \times 2^8 + 1 \times 2 \times 2^3 \times 2^4 + 1 \times 2^2 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 \\ &= 2 \times 2^8 + (8+8) \times 2^4 + (2^3+1) \times 2^0 \\ &= 2 \times (2^4)^2 + 12 \times 2^4 + (9) \times 2^0 \\ &= 2 \times 16^2 + 12 \times 16^1 + 9 \times 16^0 \\ &= (2C9)_{16} \end{aligned}$$

|         |   |   |    |    |     |     |     |     |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Base 2  | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| Base 16 | 0 | 1 | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   | 8    | 9    | A    | B    | C    | D    | E    | F    |

Pour le passage de l'hexadécimal au binaire il faut convertir chaque symbole hexadécimal en binaire sur 4 bits.

Exemple : D2h :

$$\left. \begin{array}{l} D h = 13 = (1101)_2 \\ 2 h = 2 = (0010)_2 \end{array} \right\} D2 h = (1101 \ 0010)_2$$

## 2.2. Exercices

Convertir :

- en base 10 :  $(10000)_2$  ;  $(101010)_2$  ;  $(111)_2$  ;  $(101101)_2$

$$(10000)_2 = 16$$

$$(101010)_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 = 42$$

$$(111)_2 = 7$$

$$(101101)_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 = 55$$

- en binaire : 128

$$128 = 64 \times 2 + 0 \quad 8 = 4 \times 2 + 0$$

$$64 = 32 \times 2 + 0 \quad 4 = 2 \times 2 + 0$$

$$32 = 16 \times 2 + 0 \quad 2 = 1 \times 2 + 0$$

$$16 = 8 \times 2 + 0 \quad 1 = 0 \times 2 + 1$$

- en décimal :  $(1100 \ 0110)_2$

$$(11000110)_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = 198$$

Convertir :

- en base 10 :  $(125)_{16}$  ;  $(A1)_{16}$  ;  $(BCDE)_{16}$  ;  $(2B3D)_{16}$  ;

$$(125)_{16} = 1 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + 5 \times 16^0 = 293$$

$$(A1)_{16} = 10 \times 16^1 + 1 \times 16^0 = 161$$

$$(BCDE)_{16} = 11 \times 16^3 + 12 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 48360$$

$$(2B3D)_{16} = 2 \times 16^3 + 11 \times 16^2 + 3 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 11019$$

- en hexadécimal : 510 ;  $(1100 \ 0110)_2$

$$510 = 31 \times 16 + 14 \quad (1FE) \quad (11000110)_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = 198$$

$$71 = 4 \times 16 + 7$$

$$12 = 0 \times 16 + 12$$

$$198 = 12 \times 16 + 6$$

$$12 = 0 \times 16 + 12$$

$$(C6)_{16}$$

Convertir :

$$1024 = (1000000000)_2$$

$$19 = (10011)_2$$

$$54 = (110110)_2$$

$$123 = (1111011)_2$$

- Du décimal au binaire, par divisions successives, les nombres suivants : 54 ; 1024 ; 123 ; 19

$$54 = 27 \times 2 + 0$$

$$1024 = 512 \times 2 + 0$$

$$123 = 61 \times 2 + 1$$

$$19 = 9 \times 2 + 1$$

$$27 = 13 \times 2 + 1$$

$$512 = 256 \times 2 + 0$$

$$61 = 30 \times 2 + 1$$

$$9 = 4 \times 2 + 1$$

$$13 = 6 \times 2 + 1$$

$$128 = 64 \times 2 + 0$$

$$30 = 15 \times 2 + 0$$

$$4 = 2 \times 2 + 0$$

$$6 = 3 \times 2 + 0$$

$$64 = 32 \times 2 + 0$$

$$15 = 7 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$32 = 16 \times 2 + 0$$

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

$$1 = 0 \times 2 + 1$$

$$1 = 0 \times 2 + 1$$

$$16 = 8 \times 2 + 0$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$8 = 4 \times 2 + 0$$

$$1 = 0 \times 2 + 1$$

- Du décimal à l'hexadécimal, par division successives, les nombres suivants : 54 ; 1024 ; 123 ; 19

$$54 = 3 \times 16 + 6$$

$$123 = 7 \times 16 + 11$$

$$19 = 1 \times 16 + 3$$

$$3 = 0 \times 16 + 3$$

$$7 = 0 \times 16 + 7$$

$$1 = 0 \times 16 + 1$$

$$54 = (36)_{16}$$

$$123 = (7B)_{16}$$

$$19 = (13)_{16}$$

$$1024 = (400)_{16}$$

- Du binaire au décimal, en appliquant la formule générale, les nombres suivants : 110110b, 1010101b, 1100b, 100001010b, 1111111111b

$$(110110)_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = 54$$

$$(1010101)_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 = 85$$

$$(1100)_2 = 12$$

$$(100001010)_2 = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 = 266$$

$$(1111111111)_2 = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2047$$

- De l'hexadécimal au décimal, en appliquant la formule générale, les nombres suivants : B5h, A1Ch

$$(B5)_{16} = 11 \times 16^1 + 5 \times 16^0 = 181$$

$$(A1C)_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 12 \times 16^0 = 2588$$

- De l'hexadécimal au binaire, par la technique du cas particulier, les nombres suivants : B5h, A1Ch,

5D9Eh, 3F9Ch

$$(B5)_{16} \quad B = 1011 \quad 5 = 0101 \quad (10110101)_2$$

$$(A1C)_{16} \quad A = 1010 \quad 1 = 0001 \quad (10100001)_2$$

$$(5D9E)_{16} \quad 5 = 0101 \quad D = 1101 \quad 9 = 1001 \quad E = 1110 \quad (0101110110011110)_2$$

$$(3F9C)_{16} \quad 3 = 0011 \quad F = 1111 \quad 9 = 1001 \quad C = 1100 \quad (0011111110011100)_2$$

- De Binaire en Hexadécimal, par la technique du cas particulier, les nombres suivants : 110110b,

1011101b, 111001110b, 0010111010b

$(110110)_2$   $\begin{matrix} 0011=3 \\ 0110=6 \end{matrix}$   $(C3)_{16}$   
 $(1011101)_2$   $\begin{matrix} 0101=5 \\ 1101=13 \end{matrix}$   $(5D)_{16}$   
 $(111001110)_2$   $\begin{matrix} 0001=1 \\ 1100=12 \end{matrix}$   $\begin{matrix} 1110=14 \\ \end{matrix}$   $(1CE)_{16}$   
 $(0010111010)_2$   $\begin{matrix} 1011=11 \\ 1010=10 \end{matrix}$   $(BA)_{16}$

### 3. Calcul

En électronique numérique, l'information, sous forme de bits 0 ou 1, est stockée et manipulée. Les microprocesseurs possèdent des unités de calcul et de traitement dont la taille des données est fixe. Par exemple vous connaissez sûrement les processeurs 32 bits et actuellement 64 bits. Cela signifie que l'unité de calcul de ces processeurs travail sur des mots de 32 ou 64 bits et peut donc effectuer des opérations de cette taille. Il existe aussi des microcontrôleurs 8 bits, 16 bits etc.

La taille des données implique gestion de retenues, du dépassement du relatif, des nombres à virgule, ...

#### 3.1. Addition des nombres binaires

Soit  $Cin + A + B = S + Cout$  ou S est le résultat de la somme et Cout la retenue sortante.

L'addition est basée sur la table suivante, d'addition de deux bits A et B et d'une retenue Cin :

| Retenue Cin | Bit Ai | Bit Bi |  | Somme Si | Retenue Cout |
|-------------|--------|--------|--|----------|--------------|
| 0           | 0      | 0      |  | 0        | 0            |
| 0           | 0      | 1      |  | 1        | 0            |
| 0           | 1      | 0      |  | 1        | 0            |
| 0           | 1      | 1      |  | 0        | 1            |
| 1           | 0      | 0      |  | 1        | 0            |
| 1           | 0      | 1      |  | 0        | 1            |
| 1           | 1      | 0      |  | 0        | 1            |
| 1           | 1      | 1      |  | 1        | 1            |

**Remarque :** Si la dernière retenue est un 1 alors le nombre occupe 1 bit de plus.

Exemple :

$\begin{array}{r} 0011 \quad 0001b \\ 1111 \quad 0001 \\ \hline 10010 \quad 0010 \end{array}$   
 ↳ dépassement